1.11 Critère de contrôlabilité de Kalman pour les systèmes différentiels linéaires (206, 221) [10]

La théorie du contrôle repose sur l'observation suivante : si on a une équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f(t, x)$$

peut-on y ajouter un terme de *contrôle* u afin que, pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^d$, tout point de départ $t_0 \in \mathbb{R}$, toute cible $x_f \in \mathbb{R}^d$, et tout temps d'arrivée $t_f > t_0$, la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \geqslant 0 \quad \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \\ \qquad\quad x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

(si elle existe) vérifie $x(t_f) = x_f$? Par exemple, on peut concevoir des petites voitures télécommandée, de sorte qu'on puisse *contrôler* la petite voiture pour l'amener d'un point de départ à n'importe quel point d'arrivée, pourvu qu'on se laisse assez de temps. Le but de ce développement est de montrer une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité d'un système différentiel linéaire :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

défini sur un intervalle de temps fixé $[T_0, T_1]$ où l'inconnue x désigne une fonction continue sur $[T_0, T_1]$ à valeurs dans un espace $\mathbb{R}^n$, u (le contrôle) désigne une fonction $\mathrm{L}^1((T_0, T_1), \mathbb{R}^m)$ (prenez-la continue si besoin !) et A, B désignent des matrices constantes : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. D'ailleurs assurez-vous que ces hypothèses suffisent pour garantir l'existence et l'unicité d'une solution *faible* au système différentiel ! C'est une application d'un théorème de point fixe. Pour démontrer le critère de contrôlabilité de Kalman, on utilise un critère de contrôlabilité plus facile à prouver, mais inutilisable en pratique :

Proposition 1.20 (Critère de la Gramienne)**.** Soient $T_0 < T_1$ deux réels, $A \in \mathscr{C}^0([T_0, T_1], \mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in \mathscr{C}^0([T_0, T_1], \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ deux fonctions matricielles, et soit R la résolvante du système différentiel $\dot{x} = A(t)x$. Alors le système différentiel :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

est contrôlable si et seulement si la matrice suivante :

$$\mathfrak{C} = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s)B(s)B(s)^T R(T_1, s)^T \mathrm{d}s \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

appelée *matrice Gramienne* est inversible.

Démonstration. La preuve n'est pas longue, du coup je la détaille, bien que ce ne soit pas l'objet du développement. Supposons que la matrice $\mathfrak{C}$ est inversible et posons notre point de départ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et notre cible $x_f \in \mathbb{R}^n$. On va construire un contrôle explicite reliant x_0 à x_f. Pour cela, si x est la solution du système

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

telle que $x(T_0) = x_0$, alors on a une expression explicite de $x(T_1)$ par la formule de Duhamel :

$$x(T_1) = R(T_1, T_0)x_0 + \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s)B(s)u(s)\mathrm{d}s.$$

On va donc choisir u de sorte à faire apparaître notre matrice $\mathfrak{C}$: si u est définie ainsi :

$$\begin{array}{rcccl} u & : & [T_0,T_1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & t & \longmapsto & B(t)^T R(T_1,t)^T \mathfrak{C}^{-1}(x_f - R(T_1,T_0)x_0) \end{array}$$

Alors $u \in \mathscr{C}^0([T_0,T_1],\mathbb{R}^m) \subset \mathrm{L}^1((T_0,T_1),\mathbb{R}^m)$ et on a :

$$x(T_1) = R(T_1,T_0)x_0 + \mathfrak{C}\mathfrak{C}^{-1}(x_f - R(T_1,T_0)x_0) = R(T_1,T_0)x_0 + x_f - R(T_1,T_0)x_0 = x_f,$$

le système est donc contrôlable ! Prouvons la réciproque par contraposée : supposons $\mathfrak{C}$ non-inversible, de sorte qu'il existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $y^T\mathfrak{C}y = 0$. Montrons alors que le système n'est pas contrôlable, en montrant qu'on ne peut jamais relier le point de départ 0 au point d'arrivée y. En effet, on observe que :

$$0 = y^T\mathfrak{C}y = \int_{T_0}^{T_1} y^T R(T_1,s)B(s)B(s)^T R(T_1,s)^T y \mathrm{d}s = \int_{T_0}^{T_1} \left\|B(s)^T R(T_1,s)^T y\right\|^2 \mathrm{d}s.$$

Ainsi :

$$\text{Pour presque tout } s \in [T_0,T_1], \quad y^T B(s) R(T_1,s) = 0$$

en passant à la transposée. Or, là encore, si on suppose $x_0 = 0$, par la formule de Duhamel :

$$x(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,s)B(s)u(s)\mathrm{d}s,$$

de sorte que :

$$y^T x(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} \underbrace{y^T R(T_1,s)B(s)}_{=0 \text{ p.p.}} u(s)\mathrm{d}s = 0.$$

Ainsi, quel que soit le contrôle, u, $x(T_1)$ ne peut être égal à y !! Cela termine la preuve. □

On peut donc prouver le critère de contrôlabilité de Kalman :

Théorème 1.21 (Critère de Kalman)**.** Soient $T_0 < T_1$ deux réels et soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ deux matrices *constantes*. Alors le système différentiel :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

est contrôlable si et seulement si :

$$\mathrm{Vect}\left(\left\{A^i Bv,\ i \in [\![0,n-1]\!],\ v \in \mathbb{R}^m\right\}\right) = \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. On prouve donc que ce critère est équivalent au critère de la Gramienne :

$\Leftarrow$: Supposons que le système n'est pas contrôlable, et donc, que la matrice $\mathfrak{C}$ n'est pas inversible. Puisque le système est autonome, on a une expression de $\mathfrak{C}$ faisant intervenir l'exponentielle de A :

$$\mathfrak{C} = \int_{T_0}^{T_1} e^{(T_1-s)A}BB^T e^{(T_1-s)A^T}\mathrm{d}s.$$

$\mathfrak{C} \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et donc il existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $y^T\mathfrak{C}y = 0$. Ainsi, comme on a vu dans la preuve avec la Gramienne :

$$\forall t \in [T_0,T_1], \quad y^T e^{(T_1-t)A}B = 0.$$

Cela signifie que la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} k & : & [T_0, T_1] & \longmapsto & \mathscr{M}_{1,m}(\mathbb{R}) \\ & & t & \longmapsto & y^T e^{(T_1-t)} B \end{array}$$

est identiquement nulle. Or, elle est analytique sur $[T_0, T_1]$ (comprendre que chacune de ses coordonnées est analytique) et donc, en dérivant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad 0 = k^{(i)}(T_1) = (-1)^i y^T A^i B.$$

Ainsi, on a, en particulier :

$$\forall v \in \mathbb{R}^m,\ \forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad y^T A^i B v = 0$$

et donc :

$$y \in \left(\text{Vect}\left(\left\{A^i B v,\ i \in [\![0, n-1]\!],\ v \in \mathbb{R}^m\right\}\right)\right)^{\perp} \setminus \{0\}$$

et donc :

$$\text{Vect}\left(\left\{A^i B v,\ i \in [\![0, n-1]\!],\ v \in \mathbb{R}^m\right\}\right) \neq \mathbb{R}^n.$$

$\Rightarrow$: Supposons que :

$$\text{Vect}\left(\left\{A^i B v,\ i \in [\![0, n-1]\!],\ v \in \mathbb{R}^m\right\}\right) \neq \mathbb{R}^n.$$

Dans ce cas, il existe un vecteur y non-nul dans l'orthogonal de cet espace, ce qui s'écrit :

$$\forall v \in \mathbb{R}^m,\ \forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad y^T A^i B v = 0.$$

Cela signifie donc :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad y^T A^i B = 0.$$

Or, par le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad A^i \in \text{Vect}\left(\left\{A^j,\ j \in [\![0, n-1]\!]\right\}\right).$$

Ainsi, par linéarité :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad y^T A^i B = 0$$

et donc :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad k^{(i)}(T_1) = 0.$$

Par analyticité de k sur $[T_0, T_1]$, cela signifie que k est identiquement nulle sur $[T_0, T_1]$! Ainsi, on a trouvé un vecteur non-nul y tel que $y^T \mathfrak{C} y = 0$. Or la matrice $\mathfrak{C}$ est symétrique positive. Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left|x^T \mathfrak{C} y\right| \leqslant \sqrt{(y^T \mathfrak{C} y)\,(x^T \mathfrak{C} x)} = 0.$$

Ainsi, cela veut dire qu'on a trouvé un vecteur y non-nul tel que $\mathfrak{C} y = 0$, donc $\mathfrak{C}$ n'est pas inversible et donc le système n'est pas contrôlable ! Cela termine cette preuve ! □

Remarque 1.11.1. *Cette démonstration se prête bien, au tableau, à ne pas trop détailler la réciproque et juste remonter les équivalences en écrivant où est-ce qu'il y a du travail à faire pour remonter et simplement détailler (ou pas trop !) la preuve de ces remontées ! Du coup la preuve peut être rapide si vous présentez bien, de sorte qu'il peut être envisageable de prouver également le critère intégral de la gramienne, ou bien d'appliquer le critère de Kalmann à un exemple simple, par exemple, l'oscillateur harmonique :*

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

si on veut simplement contrôler la position de notre oscillateur (ici, u est une fonction scalaire). On a alors :

$$A^0 = I_2, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$A^0 B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^1 B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs forment un système libre de $\mathbb{R}^2$, et donc, par le critère de Kalman, l'oscillateur harmonique est contrôlable !

Remarque 1.11.2 (Et pour les systèmes non-autonomes ?)**.** *Pour les systèmes non-autonomes, on ne peut plus appliquer le théorème de Cayley-Hamilton, et donc la preuve devient caduque. En fait, on n'aura pas un critère de contrôlabilité mais simplement une condition suffisante qui s'énonce ainsi :*

Théorème 1.22. Supposons $A \in \mathscr{C}^\infty([T_0, T_1], \mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in \mathscr{C}^\infty([T_0, T_1], \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$. Définissons la suite de fonctions matricielles B_i ainsi :

$$\begin{cases} & B_0 &=& B \\ \forall i \in \mathbb{N}, & B_{i+1} &=& \dot{B}_i - AB_i. \end{cases}$$

Alors, s'il existe $t^* \in [T_0, T_1]$ tel que :

$$\mathrm{Vect}\left(\{B_i(t^*)v,\ i \in \mathbb{N},\ v \in \mathbb{R}^m\}\right) = \mathbb{R}^n,$$

alors le système différentiel :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

est contrôlable.

Démonstration. Supposons le système non-contrôlable. On a donc que la matrice $\mathfrak{C}$ est non-inversible. Ainsi, il existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$0 = y^T \mathfrak{C} y = \int_{T_0}^{T_1} \left\| R(T_1, s)^T B(s) y \right\|^2 \mathrm{d}s = 0.$$

Ainsi, l'intégrande est identiquement nulle. Ainsi, en notant $z := R(T_1, t^*)^T y$, on a que z est non-nul (la résolvante est toujours inversible) et, par propriété de la résolvante :

$$\forall t \in [T_0, T_1], \quad K(t) := z^T R(t^*, t) B(t) = y^T R(T_1, t) B(t) = 0.$$

Puisque A est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors R l'est également et donc K est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[T_0, T_1]$. Or, par propriété de la résolvante, on a :

$$\forall (t, s) \in [T_0, T_1]^2, \quad \partial_2 R(t, s) = -R(t, s) A(s).$$

Ainsi, on montre par récurrence :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \forall t \in [T_0, T_1] \quad K^{(i)}(t) = z^T R(t^*, t) B_i(t).$$

Ainsi, en particulier, en évaluant la relation en $t = t^*$:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad z^T B_i(t^*) = 0.$$

On conclut alors, comme dans le cas autonome, que :

$$\mathrm{Vect}\left(\{B_i(t^*)v,\ i \in \mathbb{N},\ v \in \mathbb{R}^m\}\right) \neq \mathbb{R}^n,$$

ce qui conclut la preuve ! En fait, pour pouvoir remonter les implications, on aurait besoin que les matrices A et B soient analytiques ! $\square$